
Programme de khôlle n° 26

Semaine du 1 Juin

Cours

• Chapitre 14 : Représentation matricielle

- Représentation d'un vecteur x d'un espace E muni d'une base \mathcal{B} par une matrice colonne $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.
- Représentation d'une application linéaire f d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'une base \mathcal{B} vers un \mathbb{R} -espace vectoriel F muni d'une base \mathcal{B}' par une matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$.
- Application $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto A(x)$ canoniquement associée à une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$, représentée en colonnes par l'application $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto AX$
- Image et noyau d'une matrice : $\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}), AX = 0\}$ et $\text{Im}(A) = \{AX, X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})\}$
- $\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_m)$ où C_1, \dots, C_m sont les colonnes de A
- f est injective (resp. surjective) si et seulement si sa matrice représentative dans des bases quelconques a ses colonnes libres (resp. génératrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$)
- Opérations : matrice d'une somme d'applications linéaires, matrice d'une composée, matrice de f^n , matrice de f^{-1} .
- Changement de base : matrice de passage, formules de changement de base pour une application linéaire (de \mathcal{E}, \mathcal{F} à $\mathcal{E}', \mathcal{F}'$) et pour un endomorphisme (de \mathcal{B} à \mathcal{B}').
- Matrices équivalentes, matrices semblables
- Trace d'un endomorphisme
- Rang : $\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A))$, cette nouvelle définition coïncide avec la précédente (nombre de lignes non nulles dans une forme échelonnée de A).

Si P est inversible, $\text{rg}(A) = \text{rg}(PA) = \text{rg}(AP)$

- A est de rang r si et seulement si elle est équivalente à la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,m-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r,m-r} \end{array} \right)$
- Deux matrices sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
- Rang d'une famille de vecteurs.
- Explication du pivot de Gauss en terme de multiplication par des matrices inversibles.
- Théorème du rang pour les matrices

Questions de cours :

- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, $g \in \mathcal{L}(F, G)$, \mathcal{B} base de E , \mathcal{B}' base de F et \mathcal{B}'' base de G , alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f)$
- f est injective si et seulement si les colonnes de la matrice représentative de f dans des bases quelconques forment une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$
- Si $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$, alors $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.